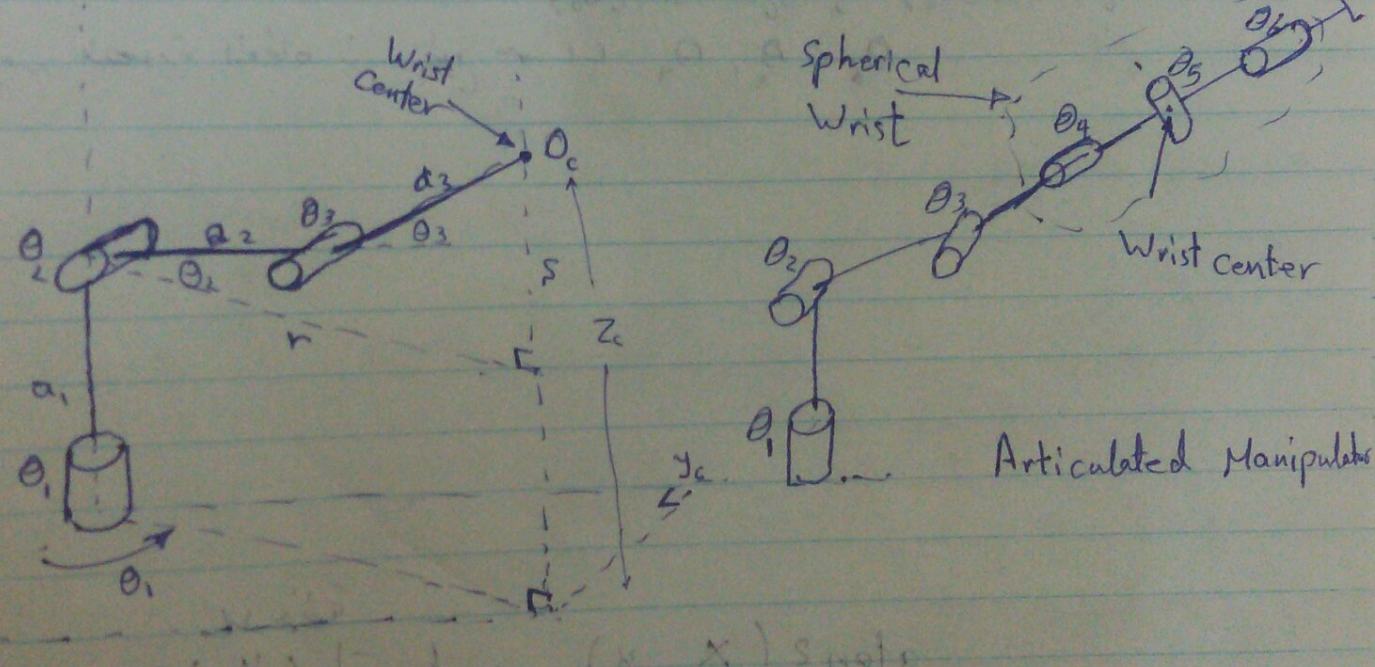
Inverse Kinematics of Articulated Manipulator (Geometric approach)

Given: ${}^{base}H_{EE}$

Required: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$

Solution:
- use geometric analysis of the manipulator to find joint variables as a function of EE-pose
- Apply the Concept of Kinematic Decoupling based on the fact that: Wrist Center of a Spherical wrist has a Position depends only on $\theta_1, \theta_2, \theta_3$



المطلوب: إيجاد قيم الزوايا من θ_1 حتى θ_6

- من خصائص Spherical Wrist أنه يجب Wrist Center لا يتغير موقعه مهما تغيرت قيم زوايا Spherical Wrist أي $\theta_6 \subset \theta_5 \subset \theta_4$. وبناء عليه فإنه O_c يعتمد فقط على $\theta_3 \subset \theta_2 \subset \theta_1$

الخطوات: ١- معلومية ${}^{base}H_{EE}$ (EE pose) نحدد مكان O_c

٢- بعد إيجاد $\theta_3 \subset \theta_2 \subset \theta_1$ نكون Rotation Matrix ${}^0R_3$

٣- باستخدام الخصائص الهندسية لـ Manipulator نحدد $\theta_3 \subset \theta_2 \subset \theta_1$ بدلالة O_c

٤. معلومية دوران EE عن base $({}^{0}R_{6})$ ، بعد إيجاد ${}^{0}R_{3}$ نجد ${}^{3}R_{6}$

$${}^{3}R_{6} = ({}^{0}R_{3})^{-1}\,{}^{0}R_{6}$$

٥. ${}^{3}R_{6}$ هي Rotation Matrix تعتمد على θ_6 ، θ_5 ، θ_4

٦. معلومية أن Spherical Wrist هو دوران لـ Euler angles فبالتالي نكون معلومية ${}^{3}R_{6}$: دوران كالتالي

$${}^{3}R_{6} = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4S_6 & S_4S_5 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

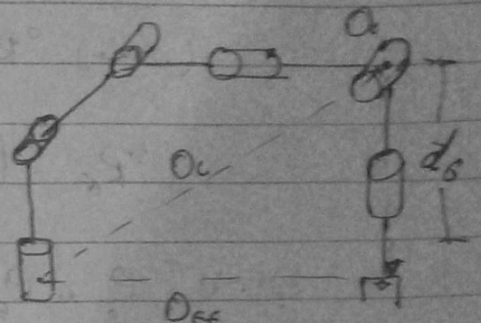
where $C_i = \cos(\theta_i)$, $S_i = \sin(\theta_i)$

٧. من الصورة المعطاة نستطيع حساب θ_6 ، θ_5 ، θ_4

٨. معرفة

$$\operatorname{atan2}(x, y) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

التطبيق: خطوات الحل المطلوبة لبداية السؤال كالتالي:



① $\underset{\text{معلوم}}{O_{EE}} = O_c + d_6 \underset{\text{معلوم}}{{}^0R_6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \boxed{O_c = O_{EE} - d_6 {}^0R_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Wrist Center position ثم إيجاد

نستخدمه في إيجاد $\theta_3 \theta_2 \theta_1$ بناء على الشكل الهندسي

d_6 في اتجاه Z_6 مسافة

نسبيًا بالنسبة لـ base

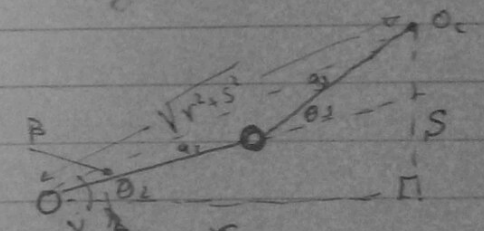
تضربنا في ${}^0R_6$

a) $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y_c}{x_c}\right) = \text{atan2}(x_c, y_c)$

$\theta_2 \theta_3$ إيجاد

$$\cos\theta_3 = \frac{-a_2^2 - a_3^2 + (r^2+s^2)}{2a_2a_3}$$

$$= \frac{-a_2^2 - a_3^2 + (x_c^2 + y_c^2 + (z_c - d_1)^2)}{2a_2a_3} = D$$



$$\theta_3 = \text{atan2}\left(D, \pm\sqrt{1-D^2}\right)$$

$\cos\theta_3$ $\sin\theta_3$

$$\theta_2 = \text{atan2}(r, s) - \text{atan2}(a_2 + a_3\cos\theta_3, a_3\sin\theta_3)$$

$$\theta_2 = \gamma - \beta$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{a_3\sin\theta_3}{a_2 + a_3\cos\theta_3}\right)$$

* الجزء السابع من الحل هو نهاية المسألة، وهي Invers position : $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ as a function of O_c

* تكون ${}^0R_3$ بدلالة $\theta_3 \theta_2 \theta_1$

الجزء الثاني ـــــ Inverse Orientation

معلومية ${}^0R_3$ من الخطوة السابقة ، ${}^0R_6$ (معطى)

$${}^3R_6 = ({}^0R_3)^{-1}\ {}^0R_6$$

من صورة ${}^3R_6$ يتم ايجاد θ_4 ، θ_5 ، θ_6 كالتالي:

$$\Rightarrow \theta_4 = \text{atan2}(r_{13}, r_{23})$$

$$\Rightarrow \theta_5 = \text{atan2}(r_{33}, \pm\sqrt{1 - r_{33}^2})$$

$$\Rightarrow \theta_6 = \text{atan2}(-r_{31}, r_{32})$$